Eine Gebrauchsfassung des Redehandlungskalküls

Oktober 2011

Moritz Cordes und Friedrich Reinmuth

1 Annehmen, Anziehen, Folgern, Ableiten

Ableiten und Beweisen resp. Argumentieren sind lebensweltlich wie wissenschaftlich wohlvertraute und unverzichtbare Mittel der diskursiven Wahrheitsfindung. Diese komplexen Handlungen werden dabei durch die sukzessive Ausführung von Redehandlungen, nämlich des Annehmens von Aussagen, des Anziehens von Aussagen als Gründen und des Folgerns von Aussagen, vollzogen. Redehandlungen werden durch die Äußerung entsprechender Sätze vollzogen. Welche Redehandlung mit der Äußerung eines Satzes vollzogen wird, hängt davon ab, welche performativen Redeteile die Aussage des Satzes bestimmen: Mit der Äußerung von a) 'Angenommen, Hans kommt heute', b) 'Da Hans heute kommt', c) 'Also kommt Hans heute' wird die Aussage 'Hans kommt heute' a) angenommen, wobei die performativen Redeteile 'Angenommen' und '.' sind, b) als Grund angezogen, wobei die performativen Redeteile 'Da' und '.' sind, und c) gefolgert, wobei die performativen Redeteile 'Also' und '.' sind.

Im Folgenden wird eine anwendungsorientierte Fassung eines Redehandlungskalküls zur Regulierung dieser Handlungen vorgestellt, wobei zunächst nur das Annehmen und das Folgern berücksichtigt werden.[1] Der Kalkül ist für pragmatisierte Sprachen erster Stufe entwickelt, also Sprachen erster Stufe, in denen performative Redeteile, so genannte Performatoren, zur Verfügung stehen. Die einschlägigen grammatischen Begrifflichkeiten werden daher kurz eingeführt (2). Anschließend wird der Kalkül präsentiert, zunächst ohne eine Regulierung von Anziehungen (3). Einige Beispielableitungen illustrieren die Arbeitsweise des Kalküls (4). Sodann werden Möglichkeiten, den Kalkül um zulässige Regeln und Anziehungsregeln zu erweitern, vorgestellt (5). Abschließend folgt ein Zusatz, in dem Ableitungsdefinitionen, die nicht auf deontisches Metavokabular zurückgreifen, skizziert werden (6).

2 Terme, Formeln, Sätze und Satzfolgen

Im Folgenden werden die einschlägigen grammatischen Begrifflichkeiten und der Kalkül beispielhaft für eine festgewählte pragmatisierte Sprachen erster Stufe entwickelt, deren Inventar folgende Grundausdrücke jeweils paarweise disjunkter Kategorien umfasst: abzählbar unendlich viele paarweise verschiedene Individuenkonstanten: c_0, c_1, c_2, …, abzählbar unendlich viele paarweise verschiedene Parameter: x_0, x_1, x_2, …, abzählbar unendlich viele paarweise verschiedene Variablen: x_0, x_1, x_2, …, für jede von 0 verschiedene natürliche Zahl i abzählbar unendlich viele paarweise verschiedene i-stellige Funktoren: $\mathrm{f}_{i.0}$, $\mathrm{f}_{i.1}$, $\mathrm{f}_{i.2}$, …, Prädikatoren: den 2-stelligen Identitätsprädikator (=) sowie für jede von 0 verschiedene natürliche Zahl i abzählbar unendlich viele paarweise und von ⌜=⌝ verschiedene i-stellige Prädikatoren: $\mathrm{P}_{i.0}$, $\mathrm{P}_{i.1}$, $\mathrm{P}_{i.2}$, …, fünf Junktoren: die 2-stelligen Junktoren Subjunktor ($\rightarrow$), Konjunktor ($\wedge$), Bisubjunktor ($\leftrightarrow$), Adjunktor ($\vee$) und den 1-stelligen Negator ($\neg$), zwei Quantifikatoren: Universalquantifikator ($\bigwedge$) und Partikularquantifikator ($\bigvee$), zwei Performatoren: Annahmeperformator (Sei) und Folgerungsperformator (Also), drei Hilfszeichen: ⌜(⌝, ⌜,⌝ und ⌜)⌝.

θ ist ein atomarer Term genau dann, wenn θ eine Individuenkonstante α, ein Parameter β oder eine Variable ξ ist. *Beispiele*: ⌜c_0⌝ (Individuenkonstante), ⌜x_0⌝ (Parameter), ⌜x_0⌝ (Variable). θ ist ein Term genau dann, wenn θ ein atomarer Term ist oder wenn es Terme $\theta'_0, \ldots, \theta'_{n-1}$ und einen n-stelligen Funktor φ gibt, so dass θ identisch mit ⌜$\varphi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n-1})$⌝ ist. θ ist ein funktoraler Term genau dann, wenn θ ein Term, aber kein atomarer Term ist. *Beispiele*: ⌜c_0⌝, ⌜x_3⌝, ⌜x_2⌝ (atomare Terme); ⌜$\mathrm{f}_{2.0}(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)$⌝, ⌜$\mathrm{f}_{1.1}(\mathrm{f}_{3.4}(x_1, \mathrm{x}_5, \mathrm{f}_{1.1}(\mathrm{c}_3)))$⌝ (funktorale Terme). μ ist ein Universalquantor genau dann, wenn es eine Variable ξ gibt, so dass μ identisch mit ⌜$\bigwedge\xi$⌝ ist; μ ist ein Partikularquantor genau dann, wenn es eine Variable ξ gibt, so dass μ identisch mit ⌜$\bigvee\xi$⌝ ist. μ ist ein Quantor genau dann, wenn μ ein Universal- oder ein Partikularquantor ist. *Beispiele* ⌜$\bigwedge x_9$⌝ (Universalquantor), ⌜$\bigvee x_3$⌝ (Partikularquantor).

Γ ist eine atomare Formel genau dann, wenn es Terme $\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}$ und einen n-stelligen Prädikator Φ gibt, so dass Γ identisch mit ⌜$\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})$⌝ ist. A ist eine Formel genau dann, wenn A eine atomare Formel ist oder wenn es eine Formel Γ gibt, so dass A identisch mit ⌜$\neg\Gamma$⌝ (der Negation von Γ), oder wenn es Formeln Δ und Γ gibt, so dass A identisch mit ⌜$(\Delta \rightarrow \Gamma)$⌝ (der Subjunktion aus Δ und Γ) oder mit ⌜$(\Delta \wedge \Gamma)$⌝ (der Konjunktion aus Δ und Γ) oder mit ⌜$(\Delta \leftrightarrow \Gamma)$⌝ (der Bisubjunktion aus Δ und Γ) oder mit ⌜$(\Delta \vee \Gamma)$⌝ (der Adjunktion aus Δ und Γ) ist, oder wenn es eine Formel Γ und eine Variable ξ gibt, so dass A identisch mit ⌜$\bigwedge\xi\Gamma$⌝

(der Universalquantifikation von Γ bezgl. ξ) oder mit $\ulcorner\bigvee\xi\Gamma\urcorner$ (der Partikularquantifikation von Γ bezgl. ξ) ist. Γ ist eine junktorale Formel genau dann, wenn Γ die Negation einer Formel A oder die Subjunktion, Konjunktion, Bisubjunktion oder Adjunktion zweier Formeln A und B ist. Γ ist eine quantorale Formel genau dann, wenn Γ die Universal- oder Partikularquantifikation einer Formel Δ bzgl. einer Variablen ξ ist. *Beispiele*: $\ulcorner P_{1.3}(x_5)\urcorner$, $\ulcorner P_{3.4}(c_4, c_2, f_{1.1}(x_1))\urcorner$ (atomare Formeln); $\ulcorner\neg P_{2.2}(x_3, f_{1.5}(f_{1.2}(x_3)))\urcorner$,$\ulcorner(\bigvee x_5 P_{1.3}(x_5) \rightarrow \neg P_{1.2}(x_0))\urcorner$, $\ulcorner(P_{1.4}(x_2) \wedge P_{1.3}(x_0))\urcorner$, $\ulcorner(P_{1.3}(f_{1.5}(x_1)) \leftrightarrow P_{1.3}(x_0))\urcorner$, $\ulcorner(\bigwedge x_2 P_{1.4}(x_2) \vee \bigvee x_0 P_{1.3}(x_0))\urcorner$ (junktorale Formeln); $\ulcorner\bigwedge x_0\bigwedge x_5(P_{1.3}(x_5) \rightarrow \neg P_{1.2}(x_0))\urcorner$, $\ulcorner\bigvee x_2(P_{1.4}(x_2) \wedge P_{1.3}(x_2))\urcorner$ (quantorale Formeln). *Hinweis*: Im Folgenden werden häufig die äußeren Klammern unterdrückt und für den Identitätsprädikator die Infixnotation verwendet. *Beispiele*: $\ulcorner\Delta \wedge \Gamma\urcorner$ für $\ulcorner(\Delta \wedge \Gamma)\urcorner$, $\ulcorner c_0 = c_0\urcorner$ für $\ulcorner{=}(c_0, c_0)\urcorner$.

ξ ist eine freie Variable in μ genau dann, wenn ξ eine Variable ist und ξ mit μ identisch ist oder wenn es Terme $\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}$ und einen n-stelliger Funktor oder Prädikator τ gibt, so dass μ identisch mit $\ulcorner\tau(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n-1})\urcorner$ und ξ eine freie Variable in einem θ_i ist, oder wenn es eine Formel Γ gibt, so dass μ identisch mit $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ und ξ eine freie Variable in Γ ist, oder wenn es Formeln Δ und Γ und einen 2-stelligen Junktor ψ gibt, so dass μ identisch mit $\ulcorner(\Delta\ \psi\ \Gamma)\urcorner$ und ξ eine freie Variable in Δ oder in Γ ist, oder wenn es eine Formel Γ, einen Quantifikator Π und eine von ξ verschiedene Variable ω gibt, so dass μ identisch mit $\ulcorner\Pi\omega\Gamma\urcorner$ und ξ eine freie Variable in Γ ist. *Beispiele*: $\ulcorner x_5\urcorner$ ist frei in $\ulcorner P_{1.3}(x_5)\urcorner$, $\ulcorner x_3\urcorner$ ist frei in $\ulcorner\neg P_{2.2}(x_3, f_{1.5}(f_{1.2}(x_3)))\urcorner$, $\ulcorner x_5\urcorner$ ist nicht frei in $\ulcorner\bigvee x_5 P_{1.3}(x_5)\urcorner$, $\ulcorner x_5\urcorner$ ist frei in $\ulcorner\neg P_{1.2}(x_5))\urcorner$, $\ulcorner x_5\urcorner$ ist frei in $\ulcorner(\bigvee x_5 P_{1.3}(x_5) \rightarrow \neg P_{1.2}(x_5))\urcorner$, $\ulcorner x_0\urcorner$ und $\ulcorner x_5\urcorner$ sind nicht frei in $\ulcorner\bigwedge x_0\bigwedge x_5(P_{1.3}(x_5) \rightarrow \neg P_{1.2}(x_0))\urcorner$.

Geschlossene Terme sind Terme, in denen keine Variable frei ist. *Beispiele*: $\ulcorner x_0\urcorner$, $\ulcorner c_2\urcorner$, $\ulcorner f_{3.1}(x_0, c_1, f_{1.4}(c_4))\urcorner$. Geschlossene Formeln (bzw. Aussagen) sind Formeln, in denen keine Variable frei ist. *Beispiele*: $\ulcorner\bigwedge x_0 P_{1.3}(x_0)\urcorner$, $\ulcorner P_{2.5}(x_4, c_5)\urcorner$. Σ ist genau dann ein Satz, wenn es einen Performator Ξ und eine Aussage Γ gibt, so dass $\Sigma = \ulcorner\Xi\ \Gamma\urcorner$; Γ ist dann die Satzaussage von $\ulcorner\Xi\ \Gamma\urcorner$. Σ ist genau dann ein Annahmesatz für Γ, wenn Γ eine Aussage und $\Sigma = \ulcorner\text{Sei }\Gamma\urcorner$ ist, und Σ ist genau dann ein Folgerungssatz für Γ, wenn Γ eine Aussage und $\Sigma = \ulcorner\text{Also }\Gamma\urcorner$ ist. *Beispiele*: $\ulcorner\text{Sei } (P_{1.6}(x_4) \vee P_{2.4}(c_5, c_7))\urcorner$ (Annahmesatz für $\ulcorner(P_{1.6}(x_4) \vee P_{2.4}(c_5, c_7))\urcorner$), $\ulcorner\text{Also } \bigvee x_0\bigvee x_3 P_{2.4}(x_0, x_3)\urcorner$ (Folgerungssatz für $\ulcorner\bigvee x_0\bigvee x_3 P_{2.4}(x_0, x_3)\urcorner$).

μ ist ein Teilausdruck von μ* (bzw.: μ kommt in μ* vor) genau dann, wenn μ* ein Grundausdruck, ein Term, ein Quantor, eine Formel oder ein Satz und μ identisch mit μ* ist oder wenn es Terme $\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}$ und einen n-stelligen Funktor oder Prädikator τ gibt, so dass μ* identisch mit $\ulcorner\tau(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})\urcorner$ und μ identisch mit τ oder ein Teilausdruck eines θ_i ist, oder wenn es einen Quantifikator Π und eine Variable ξ gibt, so dass μ* identisch mit $\ulcorner\Pi\xi\urcorner$ und μ identisch mit Π oder mit ξ ist, oder wenn es eine Formel Γ gibt, so dass μ* identisch mit $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ und μ identisch mit '¬' oder ein Teilausdruck von Γ ist, oder wenn es Formeln Δ und Γ und einen 2-stelligen Junktor ψ gibt, so dass μ* identisch mit $\ulcorner(\Delta\ \psi\ \Gamma)\urcorner$ und μ identisch mit ψ oder ein Teilausdruck von Δ oder von Γ ist, oder wenn es eine Formel Γ, einen Quantifikator Π und eine Variable ξ gibt, so dass μ* identisch mit $\ulcorner\Pi\xi\Gamma\urcorner$ und μ ein Teilausdruck von $\ulcorner\Pi\xi\urcorner$ oder von Γ ist, oder wenn es eine Formel Γ und einen Performator Ξ gibt, so dass μ* identisch mit $\ulcorner\Xi\Gamma\urcorner$ und μ identisch mit Ξ oder ein Teilausdruck von Γ ist. *Beispiele*: Die Teilausdrücke von $\ulcorner$Also $\bigvee x_3\neg \mathrm{P}_{2.2}(x_3, \mathrm{f}_{1.5}(\mathrm{f}_{1.2}(\mathrm{x}_3)))\urcorner$ sind $\ulcorner$Also$\urcorner$, $\ulcorner\bigvee x_3\neg \mathrm{P}_{2.2}(x_3, \mathrm{f}_{1.5}(\mathrm{f}_{1.2}(\mathrm{x}_3)))\urcorner$, $\ulcorner\bigvee x_3\urcorner$, $\ulcorner\bigvee\urcorner$, $\ulcorner x_3\urcorner$, $\ulcorner\neg \mathrm{P}_{2.2}(x_3, \mathrm{f}_{1.5}(\mathrm{f}_{1.2}(\mathrm{x}_3)))\urcorner$, $\ulcorner\neg\urcorner$, $\ulcorner \mathrm{P}_{2.2}(x_3, \mathrm{f}_{1.5}(\mathrm{f}_{1.2}(\mathrm{x}_3)))\urcorner$, $\ulcorner \mathrm{P}_{2.2}\urcorner$, $\ulcorner \mathrm{f}_{1.5}(\mathrm{f}_{1.2}(\mathrm{x}_3))\urcorner$, $\ulcorner \mathrm{f}_{1.5}\urcorner$, $\ulcorner \mathrm{f}_{1.2}(\mathrm{x}_3)\urcorner$, $\ulcorner \mathrm{f}_{1.2}\urcorner$ und $\ulcorner \mathrm{x}_3\urcorner$.

θ ist ein Teilterm von μ genau dann, wenn θ ein Term und μ ein Term eine Formel oder ein Satz und θ ein Teilausdruck von μ ist. Γ ist eine Teilformel von μ genau dann, wenn Γ eine Formel und μ eine Formel oder ein Satz und Γ ein Teilausdruck von μ ist. *Beispiele*: Die Teilterme von $\ulcorner \mathrm{f}_{2.0}(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)\urcorner$ sind $\ulcorner \mathrm{f}_{2.0}(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)\urcorner$, $\ulcorner \mathrm{c}_1\urcorner$ und $\ulcorner \mathrm{c}_2\urcorner$, die Teilterme von $\ulcorner\bigwedge x_0\bigwedge x_5(\mathrm{P}_{1.3}(x_5) \rightarrow \neg \mathrm{P}_{1.2}(x_0))\urcorner$ sind $\ulcorner x_0\urcorner$ und $\ulcorner x_5\urcorner$, die Teilterme von $\ulcorner$Also $\bigvee x_3\neg \mathrm{P}_{2.2}(x_3, \mathrm{f}_{1.5}(\mathrm{f}_{1.2}(\mathrm{x}_3)))\urcorner$ sind $\ulcorner x_3\urcorner$, $\ulcorner \mathrm{f}_{1.5}(\mathrm{f}_{1.2}(\mathrm{x}_3))\urcorner$, $\ulcorner \mathrm{f}_{1.2}(\mathrm{x}_3)\urcorner$ und $\ulcorner \mathrm{x}_3\urcorner$; die Teilformeln von $\ulcorner\bigwedge x_0\bigwedge x_5(\mathrm{P}_{1.3}(x_5) \rightarrow \neg \mathrm{P}_{1.2}(x_0))\urcorner$ sind $\ulcorner\bigwedge x_0\bigwedge x_5(\mathrm{P}_{1.3}(x_5) \rightarrow \neg \mathrm{P}_{1.2}(x_0))\urcorner$, $\ulcorner\bigwedge x_5(\mathrm{P}_{1.3}(x_5) \rightarrow \neg \mathrm{P}_{1.2}(x_0))\urcorner$, $\ulcorner(\mathrm{P}_{1.3}(x_5) \rightarrow \neg \mathrm{P}_{1.2}(x_0))\urcorner$, $\ulcorner \mathrm{P}_{1.3}(x_5)\urcorner$, $\ulcorner\ \neg \mathrm{P}_{1.2}(x_0)\urcorner$ und $\ulcorner \mathrm{P}_{1.2}(x_0)\urcorner$, die Teilformeln von $\ulcorner$Also $\bigvee x_3\neg \mathrm{P}_{2.2}(x_3, \mathrm{f}_{1.5}(\mathrm{f}_{1.2}(\mathrm{x}_3)))\urcorner$ sind $\ulcorner\bigvee x_3\neg \mathrm{P}_{2.2}(x_3, \mathrm{f}_{1.5}(\mathrm{f}_{1.2}(\mathrm{x}_3)))\urcorner$, $\ulcorner\neg \mathrm{P}_{2.2}(x_3, \mathrm{f}_{1.5}(\mathrm{f}_{1.2}(\mathrm{x}_3)))\urcorner$ und $\ulcorner \mathrm{P}_{2.2}(x_3, \mathrm{f}_{1.5}(\mathrm{f}_{1.2}(\mathrm{x}_3)))\urcorner$.

Ist θ ein geschlossener Term, ξ eine Variable und μ ein Term oder eine Formel, dann sei das Ergebnis der Substitution von θ für ξ in μ (kurz: [θ, ξ, μ]) identisch mit θ, falls ξ identisch mit μ ist, identisch mit μ, falls μ ein atomarer und von ξ verschiedener Term ist, identisch mit $\ulcorner\tau([\theta, \xi, \theta'_0], \ldots, [\theta, \xi, \theta'_{n\text{-}1}])\urcorner$, falls τ ein n-stelliger Funktor oder Prädikator ist, $\theta'_0, \ldots, \theta'_{n\text{-}1}$ Terme sind und μ identisch mit $\ulcorner\tau(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n\text{-}1})\urcorner$ ist, identisch mit $\ulcorner\neg[\theta, \xi, \Gamma]\urcorner$, falls Γ eine Formel und μ identisch mit $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ ist, identisch mit $\ulcorner([\theta, \xi, \Delta]\ \psi\ [\theta, \xi, \Gamma])\urcorner$, falls Δ und Γ Formeln sind, ψ ein 2-stelliger Junktor und μ identisch mit $\ulcorner(\Delta\ \psi\ \Gamma)\urcorner$ ist, identisch mit $\ulcorner\Pi\omega[\theta, \xi, \Delta]\urcorner$, falls Π ein Quantifikator, ω eine von ξ verschiedene Variable, Δ eine Formel und μ identisch mit $\ulcorner\Pi\omega\Delta\urcorner$ ist, identisch mit $\ulcorner\Pi\omega\Delta\urcorner$, falls Π ein Quantifikator, ω identisch mit ξ, Δ eine Formel und μ identisch mit $\ulcorner\Pi\omega\Delta\urcorner$ ist. *Beispiele*: $[\ulcorner \mathrm{c}_2\urcorner, \ulcorner x_3\urcorner, \ulcorner x_3\urcorner] = \ulcorner \mathrm{c}_2\urcorner$, $[\ulcorner \mathrm{c}_2\urcorner, \ulcorner x_3\urcorner, \ulcorner x_1\urcorner] = \ulcorner x_1\urcorner$, $[\ulcorner \mathrm{c}_2\urcorner, \ulcorner x_3\urcorner, \ulcorner \mathrm{x}_3\urcorner] = \ulcorner \mathrm{x}_3\urcorner$, $[\ulcorner \mathrm{c}_2\urcorner, \ulcorner x_3\urcorner, \ulcorner \mathrm{c}_4\urcorner] = \ulcorner \mathrm{c}_4\urcorner$, $[\ulcorner \mathrm{f}_{1.3}(\mathrm{x}_2)\urcorner, \ulcorner x_4\urcorner, \ulcorner \mathrm{P}_{2.1}(x_4, \mathrm{f}_{1.2}(x_4))\urcorner] = \ulcorner \mathrm{P}_{2.1}(\mathrm{f}_{1.3}(\mathrm{x}_2), \mathrm{f}_{1.2}(\mathrm{f}_{1.3}(\mathrm{x}_2)))\urcorner$, $[\ulcorner \mathrm{x}_1\urcorner, \ulcorner x_0\urcorner, \ulcorner(\mathrm{P}_{1.0}(x_0) \wedge \bigvee x_0 \mathrm{P}_{1.1}(x_0))\urcorner] = \ulcorner(\mathrm{P}_{1.0}(\mathrm{x}_1) \wedge \bigvee x_0 \mathrm{P}_{1.1}(x_0))\urcorner$.

$\mathfrak{H}$ <u>ist eine Satzfolge</u> genau dann, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, so dass $\mathfrak{H}$ eine Folge von k Sätzen $\Sigma_0, \ldots, \Sigma_{k\text{-}1}$ ist. Dabei ist <u>die leere Satzfolge</u> (also die leere Menge, $\emptyset$) von 0 Sätzen ebenfalls eine Satzfolge. Ist $\mathfrak{H}$ eine nicht-leere Satzfolge, dann ist die Aussage des letzten Gliedes von $\mathfrak{H}$ <u>die Konklusion von</u> $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{A}$ <u>ist ein Abschnitt von</u> i <u>bis</u> j <u>in</u> $\mathfrak{H}$ genau dann, wenn es ein k gibt, so dass $\mathfrak{H}$ eine Folge von k Sätzen ist und $i \leq j < k$ und $\mathfrak{A}$ den von i bis j reichenden Teil von $\mathfrak{H}$ bildet, d.h., wenn $\mathfrak{A}$ alle Zeilen ab einschließlich Zeile i bis einschließlich Zeile j von $\mathfrak{H}$ umfasst. Ist $\mathfrak{H}$ eine Folge von k Sätzen und $l < k$, dann ist $\mathfrak{H}\upharpoonright l$ (<u>die Beschränkung von</u> $\mathfrak{H}$ <u>auf</u> l) identisch mit der leeren Satzfolge, falls $l = 0$, und identisch mit dem Abschnitt von 0 bis l-1 in $\mathfrak{H}$, falls $0 < l$. Ist $\mathfrak{H}$ eine Folge von k Sätzen und Σ ein Satz, dann ist <u>die Fortsetzung von</u> $\mathfrak{H}$ <u>um</u> Σ genau dann mit $\mathfrak{H}^*$ identisch, wenn $\mathfrak{H}^*$ eine Folge von k+1 Sätzen ist und $\mathfrak{H}^*\upharpoonright k$ identisch mit $\mathfrak{H}$ und Σ der Satz in Zeile k von $\mathfrak{H}^*$ ist. Als *Beispiel* diene folgenden Satzfolge, $\mathfrak{H}^{[2.1]}$:

Beispiel	**[2.1]**	
0	Sei	$P_{1.1}(c_1)$
1	Sei	$\neg P_{1.1}(c_1)$
2	Sei	$\neg P_{2.1}(c_3, c_4)$
3	Also	$P_{1.1}(c_1)$
4	Also	$\neg P_{1.1}(c_1)$
5	Also	$\neg\neg P_{2.1}(c_3, c_4)$
6	Also	$P_{2.1}(c_3, c_4)$
7	Also	$\neg P_{1.1}(c_1) \rightarrow P_{2.1}(c_3, c_4)$
8	Also	$P_{1.1}(c_1) \rightarrow (\neg P_{1.1}(c_1) \rightarrow P_{2.1}(c_3, c_4))$

Erläuterung: $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ ist eine Folge von 9 Sätzen und damit eine Satzfolge. $\mathfrak{H}^{[2.1]}\upharpoonright 0$ ist die leere Satzfolge und $\mathfrak{H}^{[2.1]}\upharpoonright 1$ ist ein Abschnitt von 0 bis 0 in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ und $\mathfrak{H}^{[2.1]}\upharpoonright 1$ ist die Fortsetzung der leeren Satzfolge um ⌜Sei $P_{1.1}(c_1)$⌝. Allgemein gilt für alle $i \leq 8$: $\mathfrak{H}^{[2.1]}\upharpoonright i+1$ ist ein Abschnitt von 0 bis i in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ und $\mathfrak{H}^{[2.1]}\upharpoonright i+1$ ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}^{[2.1]}\upharpoonright i$ um den Satz in Zeile i von $\mathfrak{H}^{[2.1]}$, wobei $\mathfrak{H}^{[2.1]}\upharpoonright 9$ identisch mit $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ ist. Für alle $i \leq 8$ gilt sodann, dass die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ die Konklusion von $\mathfrak{H}^{[2.1]}\upharpoonright i+1$ ist. So ist etwa ⌜$P_{1.1}(c_1)$⌝ die Konklusion von $\mathfrak{H}^{[2.1]}\upharpoonright 1$. Die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist ⌜$P_{1.1}(c_1) \rightarrow (\neg P_{1.1}(c_1) \rightarrow P_{2.1}(c_3, c_4))$⌝.

3 Regeln zum Redehandeln: Der Kalkül

Mit dem Redehandlungskalkül werden nun Regeln für das Annehmen und das Folgern etabliert, die letztendlich das Ableiten von Aussagen aus Aussagenmengen anleiten. Dazu ist vorbereitend zu bemerken: Ein Autor nimmt eine Aussage Γ an, indem er den Satz ⌜Sei Γ⌝ äußert, und ein Autor folgert eine Aussage Γ, indem er den Satz ⌜Also Γ⌝ äußert. Ein Autor äußert die leere Satzfolge, indem er nichts äußert. Ein Autor äußert eine nicht-leere Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen, indem er nacheinander für jedes $i < k$ den Satz in Zeile i von $\mathfrak{H}$ äußert. Hat ein Autor eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen geäußert und ist Γ eine Aussage, dann setzt er $\mathfrak{H}$ durch die Annahme von Γ zu einer Folge von k+1 Sätzen fort, deren letztes Glied ⌜Sei Γ⌝ ist, und er setzt $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ zu einer Folge von k+1 Sätzen fort, deren letztes Glied ⌜Also Γ⌝ ist.

Wie für pragmatisierte Kalküle des natürlichen Schließens üblich, gibt es eine Annahmeregel, die das Annehmen beliebiger Aussagen erlaubt, und für jeden der acht logischen Operatoren, also den Identitätsprädikator, die fünf Junktoren und die Quant(ifika)toren, jeweils eine Einführungs- und eine Beseitigungsregel. Abgesehen von der Regel der **I**dentitäts**e**inführung (IE), verlangen die Einführungs- und Beseitigungsregeln immer, dass bereits entsprechende Prämissen gewonnen wurden, d.h. verfügbar sind. So erlaubt etwa die Regel der **S**ubjunktor**b**eseitigung (SB), dass man Γ folgern darf, wenn Δ und ⌜Δ → Γ⌝ bereits verfügbar gemacht worden sind. Verfügbar gemacht werden Aussagen dabei, indem sie gefolgert oder angenommen werden.

Drei der Regeln, nämlich **S**ubjunktor**e**inführung (SE), **N**egator**e**inführung (NE) und **P**artikularquantor**b**eseitigung (PB), erlauben es ihrerseits, sich von gemachten Annahmen auch wieder zu befreien: Hat man im Ausgang von der Annahme einer Aussage Δ eine Aussage Γ gewonnen, dann darf man ⌜Δ → Γ⌝ folgern und sich so von der gemachten Annahme von Δ befreien (SE); hat man im Ausgang von der Annahme einer Aussage Δ Aussagen Γ und ⌜¬Γ⌝ gewonnen, dann darf man ⌜¬Δ⌝ folgern und sich so von der gemachten Annahme von Δ befreien (NE); ist eine Partikularquantifikation ⌜⋁ξΔ⌝ verfügbar und hat man im Ausgang von der repräsentativen Ersatzannahme [β, ξ, Δ] eine Aussage Γ gewonnen, dann darf man Γ folgern und sich so von der gemachten Ersatzannahme befreien (PB). Die Befreiung von der jeweils gemachten Eingangsannahme wird dabei dadurch erreicht, dass mit der Anwendung von SE, NE und PB sowohl die jeweiligen Eingangsannahmen als auch die unter dieser Annahme gewonnen Zwischenfolgerungen als Prämissen unverfügbar gemacht werden. Umgekehrt macht die Anwendung der Annahmeregel die angenommene Aussage als Annahme verfügbar, von der man sich durch und nur durch eine Fortsetzung wieder befreit, die nach SE, NE oder PB erfolgen darf. Neben der Annahmeregel und den Regelpaaren für die logischen Operatoren enthält die hier präsentierte Fassung des Kalküls eine Wiederholungsregel, die den Schluss von einer bereits verfügbaren Aussage auf diese Aussage selbst erlaubt und bezogen auf die übrigen Regeln eine zulässige Regel darstellt.

Wann eine Aussage Γ in einer Satzfolge $\mathfrak{H}$ bei einem i (also in Zeile i) verfügbar ist wird im Folgenden simultan mit den Regeln etabliert. Zur handlicheren Formulierbarkeit sei dazu vorbereitend vereinbart: Wenn $\mathfrak{H}$ eine Satzfolge ist, dann sei Γ genau dann in $\mathfrak{H}$ verfügbar, wenn Γ in $\mathfrak{H}$ bei einem i verfügbar ist. Sodann sei Γ genau dann in $\mathfrak{H}$ bei i als Annahme verfügbar, wenn Γ in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar ist und der dortige Satz ein Annahmesatz für Γ ist. Γ sei genau dann in $\mathfrak{H}$ als Annahme verfügbar (kurz: eine in $\mathfrak{H}$ verfügbare Annahme), wenn Γ in $\mathfrak{H}$ bei einem i als Annahme verfügbar ist. Sodann sei Γ genau dann in $\mathfrak{H}$ bei i als letzte Annahme verfügbar, wenn Γ in $\mathfrak{H}$ bei i als Annahme verfügbar ist und kein Δ in $\mathfrak{H}$ bei einem $l > i$ als Annahme verfügbar ist. Zuletzt sei Γ genau dann in $\mathfrak{H}$ als letzte Annahme verfügbar, wenn es ein i gibt, so dass Γ in $\mathfrak{H}$ bei i als letzte Annahme verfügbar ist. Es folgen nun die Regeln des um eine Wiederholungsregel erweiterten Redehandlungskalküls:

Einleitende Verfügbarkeitsklausel: In der leeren Sequenz ist keine Aussage verfügbar.

Annahmeregel (AR)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Γ eine Aussage ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Annahme von Γ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für AR: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach AR durch die Annahme von Γ zu $\mathfrak{H}^*$ fortsetzen darf, dann ist Γ in $\mathfrak{H}^*$ bei k verfügbar und alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, sind auch in $\mathfrak{H}^*$ bei diesem l verfügbar.

Subjunktoreinführungsregel (SE)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Δ in $\mathfrak{H}$ als letzte Annahme verfügbar ist und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von $\ulcorner\Delta \to \Gamma\urcorner$ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für SE: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach SE durch die Folgerung von $\ulcorner\Delta \to \Gamma\urcorner$ zu $\mathfrak{H}^*$ fortsetzen darf und Δ in $\mathfrak{H}$ bei i als letzte Annahme verfügbar ist, dann ist $\ulcorner\Delta \to \Gamma\urcorner$ in $\mathfrak{H}^*$ bei k verfügbar und alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, sind in $\mathfrak{H}^*$ bei l verfügbar, falls $l < i$, andernfalls sind sie in $\mathfrak{H}^*$ bei l nicht mehr verfügbar.

Subjunktorbeseitigungsregel (SB)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Δ und $\ulcorner\Delta \to \Gamma\urcorner$ in $\mathfrak{H}$ verfügbar sind, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für SB: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach SB durch die Folgerung von Γ zu $\mathfrak{H}^*$ fortsetzen darf, dann ist Γ in $\mathfrak{H}^*$ bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach SE oder

NE oder PB zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann sind alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}$* bei diesem l verfügbar.

Konjunktoreinführungsregel (KE)
Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Δ und Γ in $\mathfrak{H}$ verfügbar sind, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von ⌜Δ ∧ Γ⌝ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für KE: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach KE durch die Folgerung von ⌜Δ ∧ Γ⌝ zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann ist ⌜Δ ∧ Γ⌝ in $\mathfrak{H}$* bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach PB zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann sind alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}$* bei diesem l verfügbar.

Konjunktorbeseitigungsregel (KB)
Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und ⌜Δ ∧ Γ⌝ oder ⌜Γ ∧ Δ⌝ in $\mathfrak{H}$ verfügbar ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für KB: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach KB durch die Folgerung von Γ zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann ist Γ in $\mathfrak{H}$* bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach SE oder NE oder PB zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann sind alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}$* bei diesem l verfügbar.

Bisubjunktoreinführungsregel (BE)
Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und ⌜Δ → Γ⌝ und ⌜Γ → Δ⌝ in $\mathfrak{H}$ verfügbar sind, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von ⌜Δ ↔ Γ⌝ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für BE: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach BE durch die Folgerung von ⌜Δ ↔ Γ⌝zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann ist ⌜Δ ↔ Γ⌝ in $\mathfrak{H}$* bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach PB zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann sind alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}$* bei diesem l verfügbar.

Bisubjunktorbeseitigungsregel (BB)
Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Δ und dazu ⌜Δ ↔ Γ⌝ oder ⌜Γ ↔ Δ⌝ in $\mathfrak{H}$ verfügbar sind, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für BB: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach BB durch die Folgerung von Γ zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann ist Γ in $\mathfrak{H}$* bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach SE oder NE oder PB zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann sind alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}$* bei diesem l verfügbar.

Adjunktoreinführungsregel (AE)
Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat, Δ, Γ Aussagen sind und Δ oder Γ in $\mathfrak{H}$ verfügbar ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von ⌜Δ ∨ Γ⌝ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für AE: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach AE durch die Folgerung von $\ulcorner\Delta \vee \Gamma\urcorner$ zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann ist $\ulcorner\Delta \vee \Gamma\urcorner$ in $\mathfrak{H}$* bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach PB zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann sind alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}$* bei diesem l verfügbar.

Adjunktorbeseitigungsregel (AB)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und $\ulcorner A \vee B\urcorner$, $\ulcorner A \rightarrow \Gamma\urcorner$, $\ulcorner B \rightarrow \Gamma\urcorner$ in $\mathfrak{H}$ verfügbar sind, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für AB: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach AB durch die Folgerung von Γ zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann ist Γ in $\mathfrak{H}$* bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach SE oder NE oder PB zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann sind alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}$* bei diesem l verfügbar.

Negatoreinführungsregel (NE)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Δ in $\mathfrak{H}$ bei i als letzte Annahme verfügbar ist und es ein j mit $i \leq j$ und eine Aussage Γ gibt, so dass Γ in $\mathfrak{H}$ bei j verfügbar und $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist oder aber $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ in $\mathfrak{H}$ bei j verfügbar und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von $\ulcorner\neg\Delta\urcorner$ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für NE: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach NE durch die Folgerung von $\ulcorner\neg\Delta\urcorner$ zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf und Δ in $\mathfrak{H}$ bei i als letzte Annahme verfügbar ist, dann ist $\ulcorner\neg\Delta\urcorner$ in $\mathfrak{H}$* bei k verfügbar und alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, sind in $\mathfrak{H}$* bei l verfügbar, falls $l < i$, andernfalls sind sie in $\mathfrak{H}$* bei l nicht mehr verfügbar.

Negatorbeseitigungsregel (NB)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und $\ulcorner\neg\neg\Gamma\urcorner$ in $\mathfrak{H}$ verfügbar ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für NB: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach NB durch die Folgerung von Γ zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann ist Γ in $\mathfrak{H}$* bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach SE oder NE oder PB zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann sind alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}$* bei diesem l verfügbar.

Universalquantoreinführungsregel (UE)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat, Δ eine Formel und ξ eine Variable ist und β ein Parameter ist, der weder in Δ noch in einer in $\mathfrak{H}$ verfügbaren Annahme vorkommt, und [β, ξ, Δ] in $\mathfrak{H}$ verfügbar ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner$ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für UE: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach UE durch die Folgerung von $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner$ zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann ist $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner$ in $\mathfrak{H}$* bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach PB zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann sind alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}$* bei diesem l verfügbar.

Universalquantorbeseitigungsregel (UB)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat, θ ein geschlossener Term ist und ⌜⋀ξΔ⌝ in $\mathfrak{H}$ verfügbar ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von [θ, ξ, Δ] fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für UB: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach UB durch die Folgerung von [θ, ξ, Δ] zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann ist [θ, ξ, Δ] in $\mathfrak{H}$* bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach SE oder NE oder PB zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann sind alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}$* bei diesem l verfügbar.

Partikularquantoreinführungsregel (PE)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat, θ ein geschlossener Term, ξ eine Variable und Δ eine Formel ist und [θ, ξ, Δ] in $\mathfrak{H}$ verfügbar ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von ⌜⋁ξΔ⌝ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für PE: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach PE durch die Folgerung von ⌜⋁ξΔ⌝ zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann ist ⌜⋁ξΔ⌝ in $\mathfrak{H}$* bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach PB zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann sind alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}$* bei diesem l verfügbar.

Partikularquantorbeseitigungsregel (PB)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat, β ein Parameter ist, ⌜⋁ξΔ⌝ in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar ist, [β, ξ, Δ] in $\mathfrak{H}$ bei i+1 als letzte Annahme verfügbar ist, Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist und β weder in einer Zeile m mit $m \leq i$, also insbesondere auch nicht in Δ, noch in Γ vorkommt, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für PB: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach PB durch die Folgerung von Γ zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf und [β, ξ, Δ] in Zeile i+1 von $\mathfrak{H}$ als letzte Annahme verfügbar ist, dann ist Γ in $\mathfrak{H}$* bei k verfügbar und alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, sind in $\mathfrak{H}$* bei l verfügbar, falls $l \leq i$, andernfalls sind sie in $\mathfrak{H}$* bei l nicht mehr verfügbar.

Identitätseinführungsregel (IE)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und θ ein geschlossener Term ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von ⌜θ = θ⌝ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für IE: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach IE durch die Folgerung von ⌜θ = θ⌝ zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann ist ⌜θ = θ⌝ in $\mathfrak{H}$* bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach PB zu $\mathfrak{H}$* fortsetzen darf, dann sind alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}$* bei diesem l verfügbar.

Identitätsbeseitigungsregel (IB)

Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat, θ_0, θ_1 geschlossene Terme sind, ξ eine Variable und Δ eine Formel ist und ⌜$\theta_0 = \theta_1$⌝ und [θ_0, ξ, Δ] in $\mathfrak{H}$ verfügbar sind, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von [θ_1, ξ, Δ] fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für IB: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach IB durch die Folgerung von $[\theta_1, \xi, \Delta]$ zu $\mathfrak{H}^*$ fortsetzen darf, dann ist $[\theta_1, \xi, \Delta]$ in $\mathfrak{H}^*$ bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach SE oder NE oder PB zu $\mathfrak{H}^*$ fortsetzen darf, dann sind alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}^*$ bei diesem l verfügbar.

Wiederholungsregel (W)
Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Γ in $\mathfrak{H}$ verfügbar ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von Γ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel für W: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach W durch die Folgerung von Γ zu $\mathfrak{H}^*$ fortsetzen darf, dann ist Γ in $\mathfrak{H}^*$ bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach SE oder NE oder PB zu $\mathfrak{H}^*$ fortsetzen darf, dann sind alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}^*$ bei diesem l verfügbar.

Abschließende Verfügbarkeitsklausel: Sonst sind keine Aussagen in keinem $\mathfrak{H}$ bei irgendeinem l verfügbar.

$\mathfrak{H}$ <u>ist eine Ableitung von</u> Γ <u>aus</u> X genau dann, wenn es ein $k \neq 0$ gibt, so dass $\mathfrak{H}$ eine Folge von k Sätzen ist, X die Menge der in $\mathfrak{H}$ verfügbaren Annahmen ist und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist und wenn für alle $i < k$ gilt: Man darf $\mathfrak{H}\restriction i$ nach einer der aufgeführten Regeln zu $\mathfrak{H}\restriction i{+}1$ fortsetzen. $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann <u>ein Beweis für</u> Γ, wenn $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus $\emptyset$ ist. Γ <u>ist eine deduktive Konsequenz von</u> X (kurz: $X \vdash \Gamma$) genau dann, wenn X eine Aussagenmenge ist und es ein $\mathfrak{H}$ gibt, so dass $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus einem $Y \subseteq X$ ist. *Beispiel*: $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ ist eine Ableitung von $\ulcorner P_{1.1}(c_1) \rightarrow (\neg P_{1.1}(c_1) \rightarrow P_{2.1}(c_3, c_4))\urcorner$ aus der leeren Menge und damit ein Beweis dieser Aussagen. $\mathfrak{H}^{[2.1]}\restriction 8$ ist eine Ableitung von $\ulcorner\neg P_{1.1}(c_1) \rightarrow P_{2.1}(c_3, c_4)\urcorner$ aus $\{\ulcorner P_{1.1}(c_1)\urcorner\}$, $\mathfrak{H}^{[2.1]}\restriction 7$ ist eine Ableitung von $\ulcorner P_{2.1}(c_3, c_4)\urcorner$ aus $\{\ulcorner P_{1.1}(c_1)\urcorner, \ulcorner\neg P_{1.1}(c_1)\urcorner\}$, $\mathfrak{H}^{[2.1]}\restriction 6$ ist eine Ableitung von $\ulcorner\neg\neg P_{2.1}(c_3, c_4)\urcorner$ aus $\{\ulcorner P_{1.1}(c_1)\urcorner, \ulcorner\neg P_{1.1}(c_1)\urcorner\}$, $\mathfrak{H}^{[2.1]}\restriction 5$ ist eine Ableitung von $\ulcorner\neg P_{1.1}(c_1)\urcorner$ aus $\{\ulcorner P_{1.1}(c_1)\urcorner, \ulcorner\neg P_{1.1}(c_1)\urcorner, \ulcorner\neg P_{2.1}(c_3, c_4)\urcorner\}$, $\mathfrak{H}^{[2.1]}\restriction 4$ ist eine Ableitung von $\ulcorner P_{1.1}(c_1)\urcorner$ aus $\{\ulcorner P_{1.1}(c_1)\urcorner, \ulcorner\neg P_{1.1}(c_1)\urcorner, \ulcorner\neg P_{2.1}(c_3, c_4)\urcorner\}$, $\mathfrak{H}^{[2.1]}\restriction 3$ ist eine Ableitung von $\ulcorner\neg P_{2.1}(c_3, c_4)\urcorner$ aus $\{\ulcorner P_{1.1}(c_1)\urcorner, \ulcorner\neg P_{1.1}(c_1)\urcorner, \ulcorner\neg P_{2.1}(c_3, c_4)\urcorner\}$, $\mathfrak{H}^{[2.1]}\restriction 2$ ist eine Ableitung von $\ulcorner\neg P_{1.1}(c_1)\urcorner$ aus $\{\ulcorner P_{1.1}(c_1)\urcorner, \ulcorner\neg P_{1.1}(c_1)\urcorner\}$ und $\mathfrak{H}^{[2.1]}\restriction 1$ ist eine Ableitung von $\ulcorner P_{1.1}(c_1)\urcorner$ aus $\{\ulcorner P_{1.1}(c_1)\urcorner\}$. Allgemein gilt: Ist $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus X, dann ist jede nicht-leere Beschränkung von $\mathfrak{H}$ eine Ableitung der jeweiligen Konklusion aus einem $Y \supseteq X$, wobei Y die Menge der in der jeweiligen Beschränkung verfügbaren Annahmen ist.

4 Beispiele zum Ableiten

In diesem Abschnitt finden sich einige schematische Beispielableitungen. Diese sind jeweils mit zwei Kommentarspalten versehen: die innerer Kommentarspalte nennt die angewendeten Regeln und die Prämissenzeilen resp. –abschnitte, während die äußere Kommentarspalte die Zeilen aufführt, deren Satzaussagen jeweils in ihnen verfügbar sind. Man beachte, dass beide Kommentarspalten für das Ableitungsgeschäft überflüssig sind und nicht zu den Ableitungen gehören. Sie dienen lediglich als entbehrliche Hilfsmittel beim Nachvollzug von Ableitungen. Für das folgende seien A, B, Γ, Δ jeweils parameterfreie Formeln, die jeweils keine Teilformeln voneinander sind und in denen jeweils höchstens die Variablen frei sind, die durch evtl. vorangestellte Quantoren gebunden werden. ξ, ω, ζ seien jeweils voneinander verschiedene Variablen, β, β', β* voneinander verschiedene Parameter und θ_0, θ_1, θ', θ* voneinander verschiedene geschlossene Terme. Alle Theoreme gelten auch dann, wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, allerdings gestalten sich die Beweise teilweise anders.

[4.1] A ∨ ¬A (Tertium-non-Datur)

0	Sei	¬(A ∨ ¬A)	(AR)	0
1	Sei	A	(AR)	0-1
2	Also	A ∨ ¬A	(AE; 1)	0-2
3	Also	¬(A ∨ ¬A)	(W; 0)	0-3
4	Also	¬A	(NE; 1-3)	0, 4
5	Also	A ∨ ¬A	(AE; 4)	0, 4-5
6	Also	¬¬(A ∨ ¬A)	(NE; 0-5)	6
7	Also	A ∨ ¬A	(NB; 6)	6-7

[4.2] ((A → B) ∧ (¬A → B)) → B (Redundanz kontradiktorischer Antezedensformeln)

0	Sei	(A → B) ∧ (¬A → B)	(AR)	0
1	Also	A → B	(KB; 0)	0-1
2	Also	¬A → B	(KB; 0)	0-2
3	Sei	¬B	(AR)	0-3
4	Sei	A	(AR)	0-4
5	Also	B	(SB; 1, 4)	0-5
6	Also	¬B	(W; 3)	0-6
7	Also	¬A	(NE; 4-6)	0-3, 7
8	Also	B	(SB; 2, 7)	0-3, 7-8
9	Also	¬¬B	(NE; 3-8)	0-2, 9
10	Also	B	(NB; 9)	0-2, 9-10

11	Also	$((A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B)) \rightarrow B$	(SE; 0-10)	11

[4.3] $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (Abschwächung)

0	Sei	A	(AR)	0
1	Sei	B	(AR)	0-1
2	Also	A	(W; 0)	0-2
3	Also	$B \rightarrow A$	(SE; 1-2)	0, 3
4	Also	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	(SE; 0-3)	4

[4.4] $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ (Ex-contradictione-quodlibet)

0	Sei	A	(AR)	0
1	Sei	$\neg A$	(AR)	0-1
2	Sei	$\neg B$	(AR)	0-2
3	Also	A	(W; 0)	0- 3
4	Also	$\neg A$	(W; 1)	0-4
5	Also	$\neg\neg B$	(NE; 2-4)	0-1, 5
6	Also	B	(NB; 5)	0-1, 5-6
7	Also	$\neg A \rightarrow B$	(SE; 1-6)	0, 7
8	Also	$A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$	(SE; 0-7)	8

[4.5] $(A \wedge B) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$

0	Sei	$A \wedge B$	(AR)	0
1	Sei	A	(AR)	0-1
2	Also	B	(KB; 0)	0-2
3	Also	$A \rightarrow B$	(SE; 1-2)	0, 3
4	Sei	B	(AR)	0, 3-4
5	Also	A	(KB; 0)	0, 3-5
6	Also	$B \rightarrow A$	(SE; 4-5)	0, 3, 6
7	Also	$A \leftrightarrow B$	(BE; 3, 6)	0, 3, 6-7
8	Also	$(A \wedge B) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$	(SE; 0-7)	8

[4.6] $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$

0	Sei	$\neg A \wedge \neg B$	(AR)	0
1	Sei	A	(AR)	0-1
2	Sei	$\neg B$	(AR)	0-2
3	Also	A	(W; 1)	0-3

4	Also	$\neg A$	(KB; 0)	0-4
5	Also	$\neg\neg B$	(NE; 2-4)	0-1, 5
6	Also	B	(NB; 5)	0-1, 5-6
7	Also	$A \rightarrow B$	(SE; 1-6)	0, 7
8	Sei	B	(AR)	0, 7-8
9	Sei	$\neg A$	(AR)	0, 7-9
10	Also	B	(W; 8)	0, 7-10
11	Also	$\neg B$	(KB; 0)	0, 7-11
12	Also	$\neg\neg A$	(NE; 9-11)	0, 7-8, 12
13	Also	A	(NB; 12)	0, 7-8, 12-13
14	Also	$B \rightarrow A$	(SE; 8-13)	0, 7, 14
15	Also	$A \leftrightarrow B$	(BE; 7, 14)	0, 7, 14-15
16	Also	$(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$	(SE; 0-15)	16

[4.7] $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \leftrightarrow A)$ (Symmetrie von $\leftrightarrow$)

0	Sei	$A \leftrightarrow B$	(AR)	0
1	Sei	B	(AR)	0-1
2	Also	A	(BB; 0, 1)	0-2
3	Also	$B \rightarrow A$	(SE; 1-2)	0, 3
4	Sei	A	(AR)	0, 3-4
5	Also	B	(BB; 0, 4)	0, 3-5
6	Also	$A \rightarrow B$	(SE; 4-5)	0, 3, 6
7	Also	$B \leftrightarrow A$	(BE; 3, 6)	0, 3, 6-7
8	Also	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \leftrightarrow A)$	(SE; 0-7)	8

[4.8] $\bigwedge\xi(\Delta \rightarrow \Gamma) \rightarrow (\neg\bigvee\xi\Gamma \rightarrow \neg\bigvee\xi\Delta)$

0	Sei	$\bigwedge\xi(\Delta \rightarrow \Gamma)$	(AR)	0
1	Sei	$\neg\bigvee\xi\Gamma$	(AR)	0-1
2	Sei	$\bigvee\xi\Delta$	(AR)	0-2
3	Sei	$[\beta, \xi, \Delta]$	(AR)	0-3
4	Sei	$\bigvee\xi\Delta$	(AR)	0-4
5	Also	$[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \Gamma]$	(UB; 0)	0-5
6	Also	$[\beta, \xi, \Gamma]$	(SB; 3, 5)	0-6
7	Also	$\bigvee\xi\Gamma$	(PE; 6)	0-7
8	Also	$\neg\bigvee\xi\Gamma$	(W; 1)	0-8
9	Also	$\neg\bigvee\xi\Delta$	(NE; 4-8)	0-3, 9
10	Also	$\neg\bigvee\xi\Delta$	(PB; 3-9)	0-2, 10
11	Also	$\neg\bigvee\xi\Delta$	(NE; 2-10)	0-1, 11

12	Also	$\neg\bigvee\xi\Gamma \rightarrow \neg\bigvee\xi\Delta$	(SE; 1-11)	0, 12
13	Also	$\bigwedge\xi(\Delta \rightarrow \Gamma) \rightarrow (\neg\bigvee\xi\Gamma \rightarrow \neg\bigvee\xi\Delta)$	(SE; 0-12)	13

[4.9] $\bigvee\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\neg\Delta$ (Tertium-non-Datur, quantoral)

0	Sei	$\neg(\bigvee\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\neg\Delta)$	(AR)	0
1	Sei	$\bigvee\xi\Delta$	(AR)	0-1
2	Also	$\bigvee\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\neg\Delta$	(AE; 1)	0-2
3	Also	$\neg(\bigvee\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\neg\Delta)$	(W; 0)	0-3
4	Also	$\neg\bigvee\xi\Delta$	(NE; 1-3)	0, 4
5	Sei	$[\beta, \xi, \Delta]$	(AR)	0, 4-5
6	Also	$\bigvee\xi\Delta$	(PE; 5)	0, 4-6
7	Also	$\neg\bigvee\xi\Delta$	(W; 4)	0, 4-7
8	Also	$\neg[\beta, \xi, \Delta]$	(NE; 5-7)	0, 4, 8
9	Also	$\bigwedge\xi\neg\Delta$	(UE; 8)	0, 4, 8-9
10	Also	$\bigvee\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\neg\Delta$	(AE; 9)	0, 4, 8-10
11	Also	$\neg\neg(\bigvee\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\neg\Delta)$	(NE; 0-10)	11
12	Also	$\bigvee\xi\Delta \vee \bigwedge\xi\neg\Delta$	(NB; 11)	11-12

[4.10] $\neg\bigvee\xi\Delta \vee \neg\bigwedge\xi\neg\Delta$ (Tertium-non-Datur, quantoral)

0	Sei	$\neg(\neg\bigvee\xi\Delta \vee \neg\bigwedge\xi\neg\Delta)$	(AR)	0
1	Sei	$\neg\bigvee\xi\Delta$	(AR)	0-1
2	Also	$\neg\bigvee\xi\Delta \vee \neg\bigwedge\xi\neg\Delta$	(AE; 1)	0-2
3	Also	$\neg(\neg\bigvee\xi\Delta \vee \neg\bigwedge\xi\neg\Delta)$	(W; 0)	0-3
4	Also	$\neg\neg\bigvee\xi\Delta$	(NE; 1-3)	0, 4
5	Also	$\bigvee\xi\Delta$	(NB; 4)	0, 4-5
6	Sei	$[\beta, \xi, \Delta]$	(AR)	0, 4-6
7	Sei	$\bigwedge\xi\neg\Delta$	(AR)	0, 4-7
8	Also	$\neg[\beta, \xi, \Delta]$	(UB; 7)	0, 4-8
9	Also	$[\beta, \xi, \Delta]$	(W; 6)	0, 4-9
10	Also	$\neg\bigwedge\xi\neg\Delta$	(NE; 7-9)	0, 4-6, 10
11	Also	$\neg\bigwedge\xi\neg\Delta$	(PB; 6-10)	0, 4-5, 11
12	Also	$\neg\bigvee\xi\Delta \vee \neg\bigwedge\xi\neg\Delta$	(AE; 11)	0, 4-5, 11-12
13	Also	$\neg\neg(\neg\bigvee\xi\Delta \vee \neg\bigwedge\xi\neg\Delta)$	(NE; 0-12)	13
14	Also	$\neg\bigvee\xi\Delta \vee \neg\bigwedge\xi\neg\Delta$	(NB; 13)	13-14

5 Zulässige Regeln und Anziehungen

Der hier gewählte Ansatz lässt sich in verschiedenen Hinsichten ausbauen. Zunächst kann der Kalkül um zulässige Regeln erweitert werden. Genauer: Gilt $\{A_1, \ldots, A_{n\text{-}1}\} \vdash B$, dann kann der Redehandlungskalkül um eine zulässige Regel erweitert werden, die es erlaubt, bereits geäußerte Satzfolgen, in denen $A_1, \ldots, A_{n\text{-}1}$ verfügbar sind, durch die Folgerung von B fortzusetzen. Diese Regeln und die zugehörige Verfügbarkeitsklauseln haben folgende Gestalt:

Generische zulässige Regel (ZR)
Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und $A_1, \ldots, A_{n\text{-}1}$ in $\mathfrak{H}$ verfügbar sind, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Folgerung von B fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel: Wenn man eine Sequenz $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach ZR durch die Folgerung von B zu $\mathfrak{H}^*$ fortsetzen darf, dann ist B in $\mathfrak{H}^*$ bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach SE oder NE oder PB zu $\mathfrak{H}^*$ fortsetzen darf, dann sind alle Γ, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}^*$ bei diesem l verfügbar.

Des Weiteren lassen sich die von PETER HINST und GEO SIEGWART entwickelten Regularien für weitere Redehandlungen, wie etwa das Behaupten, das definitorische und axiomatische Setzen oder das Anziehen von Gründen, auch für diesen Ansatz ausnutzen.[2] Beispielhaft für die Einführung eines Anziehungsperformators, etwa ⌜Da⌝: Zunächst ist dazu die Performatorkategorie um ⌜Da⌝ zu erweitern. Sodann ist die Verwendung dieses Performators durch eine Erweiterung des Kalküls um Anziehungsregeln, die die Anziehung bestimmter, wie etwa axiomatisch oder definitorisch gesetzter, parameterfreier Aussagen erlauben, zu regulieren. Dabei gilt dann, dass ein Autor eine Aussage Γ (als Grund) anzieht, indem er den Satz ⌜Da Γ⌝ äußert, und dass ein Autor eine geäußerte Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen durch die Anziehung von Γ zu einer Folge von k+1 Sätzen fort, deren letztes Glied ⌜Da Γ⌝ ist. Die Verfügbarkeitsklauseln für SE, NE und PB werden so angepasst, dass einmal angezogene Aussagen immer verfügbar bleiben. Anziehungsregeln und die zugehörigen Verfügbarkeitsklauseln haben die folgende Gestalt:

Generische Anziehungsregel (ANZR)
Wenn man eine Satzfolge $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Γ eine so-und-so parameterfreie Aussage ist, dann darf man $\mathfrak{H}$ durch die Anziehung von Γ fortsetzen.

Verfügbarkeitsklausel: Wenn man eine Sequenz $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach ANZR durch die Folgerung von Γ zu $\mathfrak{H}^*$ fortsetzen darf, dann ist Γ in $\mathfrak{H}^*$ bei k verfügbar und wenn man $\mathfrak{H}$ nicht nach SE oder

NE oder PB zu $\mathfrak{H}^*$ fortsetzen darf, dann sind alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, auch in $\mathfrak{H}^*$ bei diesem l verfügbar.

Die angepassten Verfügbarkeitsklauseln für SE, NE und PB lauten wie folgt:

Angepasste Verfügbarkeitsklausel für SE: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach SE durch die Folgerung von $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ zu $\mathfrak{H}^*$ fortsetzen darf und Δ in $\mathfrak{H}$ bei i als letzte Annahme verfügbar ist, dann ist $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ in $\mathfrak{H}^*$ bei k verfügbar und alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, sind in $\mathfrak{H}^*$ bei l verfügbar, falls sie in $\mathfrak{H}$ bei j angezogen wurden oder falls $l < i$, andernfalls sind sie in $\mathfrak{H}^*$ bei l nicht mehr verfügbar.

Angepasste Verfügbarkeitsklausel für NE: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach NE durch die Folgerung von $\ulcorner\neg\Delta\urcorner$ zu $\mathfrak{H}^*$ fortsetzen darf und Δ in $\mathfrak{H}$ bei i als letzte Annahme verfügbar ist, dann ist $\ulcorner\neg\Delta\urcorner$ in $\mathfrak{H}^*$ bei k verfügbar und alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, sind in $\mathfrak{H}^*$ bei l verfügbar, falls sie in $\mathfrak{H}$ bei l angezogen wurden oder falls $l < i$, andernfalls sind sie in $\mathfrak{H}^*$ bei l nicht mehr verfügbar.

Angepasste Verfügbarkeitsklausel für PB: Wenn man eine Folge $\mathfrak{H}$ von k Sätzen nach PB durch die Folgerung von Γ zu $\mathfrak{H}^*$ fortsetzen darf und $[\beta, \xi, \Delta]$ in Zeile i+1 von $\mathfrak{H}$ als letzte Annahme verfügbar ist, dann ist Γ in $\mathfrak{H}^*$ bei k verfügbar und alle B, die in $\mathfrak{H}$ bei einem l verfügbar waren, sind in $\mathfrak{H}^*$ bei l verfügbar, falls sie in $\mathfrak{H}$ bei l angezogen wurden oder falls $l \leq i$, andernfalls sind sie in $\mathfrak{H}^*$ bei l nicht mehr verfügbar.

Für einen so erweiterten Kalkül lässt sich festlegen: $\mathfrak{H}$ <u>ist eine</u> T-<u>Ableitung von</u> Γ <u>aus</u> X genau dann, wenn T eine Aussagenmenge ist, es ein $k \neq 0$ gibt, so dass $\mathfrak{H}$ eine Folge von k Sätzen ist, die Menge der in $\mathfrak{H}$ angezogenen Aussagen eine Teilmenge von T ist, X die Menge der in $\mathfrak{H}$ verfügbaren Annahmen ist und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist und wenn für alle $i < k$ gilt: Man darf $\mathfrak{H}{\upharpoonright}i$ nach einer der Regeln des erweiterten Kalküls zu $\mathfrak{H}{\upharpoonright}i$+1 fortsetzen. $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann <u>ein</u> T-<u>Beweis für</u> Γ (bzw. <u>eine</u> T-<u>Argumentation für</u> Γ), wenn $\mathfrak{H}$ eine T-Ableitung von Γ aus $\emptyset$ ist. Γ <u>ist eine deduktive Konsequenz aus</u> X <u>unter</u> T (kurz: $X \vdash_T \Gamma$) genau dann, wenn X eine Aussagenmenge ist und es ein $\mathfrak{H}$ gibt, so dass $\mathfrak{H}$ eine T-Ableitung von Γ aus einem $Y \subseteq X$ ist. Dabei gilt dann: $X \vdash_T \Gamma$ genau dann, wenn $X \cup T \vdash \Gamma$.

Zusätzliche Erweiterungsmöglichkeiten bestehen in der <u>Einführung weiterer logischer Operatoren</u>. Führt man etwa $\ulcorner\Box\urcorner$ als Junktor ein und passt die Formeldefinition entsprechend an, dann lässt sich beispielsweise PRAWITZ' S_4-Regulierung dieses Redeteils[3] umsetzen, indem man (i) erlaubt, eine Satzfolge, in der Γ verfügbar ist und in der alle verfügbaren Annahmen die Gestalt $\ulcorner\Box\Delta\urcorner$ haben, durch die Folgerung von $\ulcorner\Box\Gamma\urcorner$ fortzusetzen (Boxeinführung), und (ii) erlaubt, eine Satzfolge in der ⌜$\Box\Gamma$⌝ verfügbar ist, durch die Folgerung von Γ fortzusetzen (Boxbeseitigung).

Sodann lässt sich der hier gewählte Ansatz problemlos auf Sprachen zweiter Stufe übertragen. Umgekehrt lässt sich der hier vorgestellte klassische Kalkül aber nicht nur erweitern, sondern natürlich auch einschränken. Ersetzt man etwa NB durch eine Ex-Contradictione-Quodlibet-Regel, dann erhält man einen intuitionistischen Kalkül. Streicht man NB ersatzlos, so resultiert ein minimaler Kalkül.

6 Zusatz: Ableitungsdefinitionen ohne deontisches Vokabular

Im Folgenden werden zwei Ableitungsdefinitionen ohne Rückgriff auf deontisches Vokabular etabliert, die sich insbesondere für metatheoretische Untersuchungen anbieten. Die erste Definition entspricht dabei dem Kalkül ohne Anziehungsregeln, die zweite Definition stellt einen Ableitungsbegriff unter Einbeziehung von Anziehungen bereit. Die erste Definition legt induktiv fest, wann $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von k Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge X und der verfügbaren Annahmezeilenmenge Y ist:

(i) Die leere Satzfolge ist eine Ableitung von 0 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge $\emptyset$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge $\emptyset$; und

(ii) Wenn $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von k Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge X und der verfügbaren Annahmezeilenmenge Y ist, dann:

- (ii-i) Wenn Γ eine Aussage ist, dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um ⌜Sei Γ⌝ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge $X \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge $Y \cup \{k\}$; und
- (ii-ii) Wenn $Y \neq \emptyset$ und Δ die Satzaussage in Zeile max(Y) von $\mathfrak{H}$ und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist, dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um ⌜Also $\Delta \rightarrow \Gamma$⌝ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge $(X\setminus\{j \mid \max(Y) \leq j \leq k\text{-}1\}) \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge $Y\setminus\{\max(Y)\}$; und
- (ii-iii) Wenn $Y \neq \emptyset$ und $i \in X$, wobei $\max(Y) \leq i$, und Δ die Satzaussage in Zeile max(Y) von $\mathfrak{H}$ ist und Γ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und ⌜$\neg\Gamma$⌝ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ oder ⌜$\neg\Gamma$⌝ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist, dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um ⌜Also $\neg\Delta$⌝ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge $(X\setminus\{j \mid \max(Y) \leq j \leq k\text{-}1\}) \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge $Y\setminus\{\max(Y)\}$; und
- (ii-iv) Wenn $Y \neq \emptyset$ und $i \in X$, wobei $\max(Y) = i+1$, Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist und β ein Parameter ist, der weder in einer Zeile m von $\mathfrak{H}$ mit $m \leq i$ noch in Γ vorkommt, und ⌜$\bigvee\xi\Delta$⌝ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und $[\beta, \xi, \Delta]$ die Satzaussage

in Zeile max(Y) von $\mathfrak{H}$ ist, dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um ⌜Also Γ⌝ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge ($X \backslash \{j \mid \max(Y) \leq j \leq k\text{-}1\}) \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge $Y \backslash \{\max(Y)\}$; und

(ii-v) Wenn $Y = \emptyset$ oder [B ist verschieden von der Subjunktion aus der Satzaussage in Zeile max(Y) von $\mathfrak{H}$ und der Konklusion von $\mathfrak{H}$ und [es gibt kein $i \in X$, so dass max(Y) ≤ i und ein Γ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und ⌜¬Γ⌝ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist oder ⌜¬Γ⌝ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist, oder B ist verschieden von der Negation der Satzaussage in Zeile max(Y) von $\mathfrak{H}$] und [es gibt kein $i \in X$, wobei max(Y) = i+1, so dass es eine Formel Δ und einen Parameter β, der weder in einer Zeile m von $\mathfrak{H}$ mit $m \leq i$ noch in der Konklusion von $\mathfrak{H}$ vorkommt, gibt, für die ⌜⋁ξΔ⌝ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und [β, ξ, Δ] die Satzaussage in Zeile max(Y) ist, oder B ist verschieden von der Konklusion von $\mathfrak{H}$]], und:

a) Wenn $i, j \in X$ und Δ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und ⌜Δ → B⌝ die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$; oder

b) Wenn $i, j \in X$ und Δ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und Γ die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit ⌜Δ ∧ Γ⌝ ist; oder

c) Wenn $i \in X$ und die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ mit ⌜Δ ∧ B⌝ oder mit ⌜B ∧ Δ⌝ identisch ist; oder

d) Wenn $i, j \in X$ und ⌜Δ → Γ⌝ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und ⌜Γ → Δ⌝ die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit ⌜Δ ↔ Γ⌝ ist; oder

e) Wenn $i \in X$ und Δ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$, Γ eine Aussage und B identisch mit ⌜Δ ∨ Γ⌝ oder ⌜Γ ∨ Δ⌝ ist; oder

f) Wenn $i, j, l \in X$ und ⌜Δ ∨ Γ⌝ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und ⌜Δ → B⌝ die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$ und ⌜Γ → B⌝ die Satzaussage in Zeile l von $\mathfrak{H}$ ist; oder

g) Wenn $i \in X$ und ⌜¬¬B⌝ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ ist; oder

h) Wenn $i \in X$ und Δ eine Formel, ξ eine Variable und β ein Parameter ist, der weder in einer Zeile l von $\mathfrak{H}$ mit $l \in Y$ noch in Δ vorkommt, und [β, ξ, Δ] die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit ⌜⋀ξΔ⌝ ist; oder

i) Wenn $i \in X$, θ ein geschlossener Term und ⌜⋀ξΔ⌝ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit [θ, ξ, Δ] ist; oder

j) Wenn $i \in X$ und Δ eine Formel, ξ eine Variable, θ ein geschlossener Term, [θ, ξ, Δ] die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit ⌜⋁ξΔ⌝ ist; oder

k) Wenn θ ein geschlossener Term und B identisch mit ⌜θ = θ⌝ ist; oder

l) Wenn $i, j \in X$ und Δ eine Formel und ξ eine Variable ist, θ_0, θ_1 geschlossene Terme sind und ⌜$\theta_0 = \theta_1$⌝ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und [θ_0, ξ, Δ] die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit [θ_1, ξ, Δ] ist; oder

m) Wenn $i \in X$ und B die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ ist;

dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um ⌜Also B⌝ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge $X \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge Y; und

(iii) Sonst ist kein $\mathfrak{H}$ für irgendwelche k, X, Y eine Ableitung von k Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge X und der verfügbaren Annahmezeilenmenge Y.

Erläuterung: Klausel (i) legt die Induktionsbasis fest. Klausel (iii) ist die Abschlussklausel. In Klausel (ii) werden zunächst in (ii-i) bis (ii-iv) die Fälle abgehandelt, in denen sich die verfügbaren Annahmezeilenmengen ändern: (ii-i) entspricht der Annahmeregel; (ii-ii) bis (ii-iv) entsprechen Subjunktoreinführung, Negatoreinführung und Partikularquantorbeseitigung. Der erste Teil von (ii-v) stellt eine Ausschlussklausel dar. Es wird ausgeschlossen, dass ein SE-, NE- oder PB-Szenario vorliegt. In den einzelnen Unterklauseln a) bis m) werden die verfügbaren Zeilenmengen und verfügbaren Annahmezeilenmengen der anderen regelgemäßen Fortsetzungsmöglichkeiten festgelegt. Diese Fortsetzungen sind auch dann regelgemäß (vgl. Kap. 3), wenn die Ausschlussklausel jeweils nicht erfüllt ist – nur ist dann eine entsprechende Fortsetzung gleichzeitig eine Fortsetzung nach (i-ii), (i-iii) oder (i-iv) und die Verfügbarkeiten ändern sich dementsprechend.

Mit dieser Definition gilt dann für alle $\mathfrak{H}$, k: Ist $\mathfrak{H}$ eine Folge von k Sätzen und $k \neq 0$, dann ist $\mathfrak{H}$ genau dann eine Ableitung von k Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge X und der verfügbaren Annahmezeilenmenge Y, wenn $\mathfrak{H}$ eine Ableitung der Konklusion von $\mathfrak{H}$ aus $\{\Delta \mid$ Es gibt ein $i \in Y$ und Δ ist die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}\}$ ist und für alle $i \in Y$ gilt: die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ ist in $\mathfrak{H}$ bei i als Annahme verfügbar und für alle $j \in X$ gilt: die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$ ist in $\mathfrak{H}$ bei j verfügbar.

Die zweite Definition legt induktiv fest, wann $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von k Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge X und der verfügbaren Annahmezeilenmenge Y und der Anziehungszeilenmenge Z ist:

(i) Die leere Folge ist eine Ableitung von 0 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge $\emptyset$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge $\emptyset$ und der Anziehungszeilenmenge $\emptyset$; und

(ii) Wenn $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von k Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge X und der verfügbaren Annahmezeilenmenge Y und der Anziehungszeilenmenge Z ist, dann:

(ii-i) Wenn Γ eine parameterfreie Aussage ist, dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um ⌜Da Γ⌝ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge $X \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge Y und der Anziehungszeilenmenge $Z \cup \{k\}$; und

(ii-ii) Wenn Γ eine Aussage ist, dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um ⌜Sei Γ⌝ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge $X \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge $Y \cup \{k\}$ und der Anziehungszeilenmenge Z; und (ii-iii) Wenn $Y \neq \emptyset$ und Δ die Satzaussage in Zeile max(Y) von $\mathfrak{H}$ und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist, dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um $\ulcorner$Also $\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge ($X \backslash(\{j \mid \max(Y) \leq j \leq k\text{-}1\} \backslash Z)) \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge $Y \backslash \{\max(Y)\}$ und der Anziehungszeilenmenge Z; und

(ii-iv) Wenn $Y \neq \emptyset$ und $i \in X$, wobei max(Y) $\leq i$, und Δ die Satzaussage in Zeile max(Y) von $\mathfrak{H}$ ist und Γ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ oder $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist, dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um $\ulcorner$Also $\neg\Delta\urcorner$ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge ($X \backslash(\{j \mid \max(Y) \leq j \leq k\text{-}1\} \backslash Z)) \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge $Y \backslash \{\max(Y)\}$ und der Anziehungszeilenmenge Z; und

(ii-v) Wenn $Y \neq \emptyset$ und $i \in X$, wobei max(Y) = i+1, Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist, Δ eine Formel und β ein Parameter, der weder in einer Zeile m von $\mathfrak{H}$ mit $m \leq i$ noch in Γ vorkommt, ist und $\ulcorner\forall\xi\Delta\urcorner$ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und [β, ξ, Δ] die Satzaussage in Zeile max(Y) von $\mathfrak{H}$ ist, dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner$ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge ($X \backslash(\{j \mid \max(Y) \leq j \leq k\text{-}1\} \backslash Z)) \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge $Y \backslash \{\max(Y)\}$ und der Anziehungszeilenmenge Z; und

(ii-vi) Wenn $Y = \emptyset$ oder [B ist verschieden von der Subjunktion aus der Satzaussage in Zeile max(Y) von $\mathfrak{H}$ und der Konklusion von $\mathfrak{H}$ und [es gibt kein $i \in X$, so dass max(Y) $\leq i$ und ein Γ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist oder $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist, oder B ist verschieden von der Negation der Satzaussage in Zeile max(Y) von $\mathfrak{H}$] und [es gibt kein $i \in X$, wobei max(Y) = i+1, so dass es eine Formel Δ und einen Parameter β, der weder in einer Zeile m von $\mathfrak{H}$ mit $m \leq i$ noch in der Konklusion von $\mathfrak{H}$ vorkommt, gibt, für die $\ulcorner\forall\xi\Delta\urcorner$ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und [β, ξ, Δ] die Satzaussage in Zeile max(Y) ist, oder B ist verschieden von der Konklusion von $\mathfrak{H}$]], und:

a) Wenn i, $j \in X$ und Δ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und $\ulcorner\Delta \rightarrow \mathrm{B}\urcorner$ die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$; oder

b) Wenn i, $j \in X$ und Δ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und Γ die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit $\ulcorner\Delta \wedge \Gamma\urcorner$ ist; oder

c) Wenn $i \in X$ und die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ mit $\ulcorner\Delta \wedge \mathrm{B}\urcorner$ oder mit $\ulcorner\mathrm{B} \wedge \Delta\urcorner$ identisch ist; oder

d) Wenn i, $j \in X$ und $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und $\ulcorner\Gamma \rightarrow \Delta\urcorner$ die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit $\ulcorner\Delta \leftrightarrow \Gamma\urcorner$ ist; oder

e) Wenn $i \in X$ und Δ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$, Γ eine Aussage und B identisch mit $\ulcorner\Delta \vee \Gamma\urcorner$ oder $\ulcorner\Gamma \vee \Delta\urcorner$ ist; oder

f) Wenn i, j, $l \in X$ und $\ulcorner\Delta \vee \Gamma\urcorner$ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und $\ulcorner\Delta \rightarrow \mathrm{B}\urcorner$ die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$ und $\ulcorner\Gamma \rightarrow \mathrm{B}\urcorner$ die Satzaussage in Zeile l von $\mathfrak{H}$ ist; oder

g) Wenn $i \in X$ und $\ulcorner\neg\neg B\urcorner$ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ ist oder

h) Wenn $i \in X$ und Δ eine Formel, ξ eine Variable und β ein Parameter, der weder in einer Zeile l von $\mathfrak{H}$ mit $l \in Y$ noch in Δ vorkommt, ist und $[\beta, \xi, \Delta]$ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner$ ist; oder

i) Wenn $i \in X$, θ ein geschlossener Term und $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner$ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit $[\theta, \xi, \Delta]$ ist; oder

j) Wenn $i \in X$ und Δ eine Formel, ξ eine Variable, θ ein geschlossener Term, $[\theta, \xi, \Delta]$ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit $\ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ ist; oder

k) Wenn θ ein geschlossener Term und B identisch mit $\ulcorner\theta = \theta\urcorner$ ist; oder

l) Wenn $i, j \in X$ und Δ eine Formel und ξ eine Variable ist, θ_0, θ_1 geschlossene Terme sind und $\ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner$ die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ und $[\theta_0, \xi, \Delta]$ die Satzaussage in Zeile j von $\mathfrak{H}$ und B identisch mit $[\theta_1, \xi, \Delta]$ ist; oder

m) Wenn $i \in X$ und B die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}$ ist;

dann ist die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ um $\ulcorner$Also B$\urcorner$ eine Ableitung von k+1 Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge $X \cup \{k\}$ und der verfügbaren Annahmezeilenmenge Y und der Anziehungszeilenmenge Z; und

(iii) Sonst ist kein $\mathfrak{H}$ für irgendwelche k, X, Y, Z eine Ableitung von k Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge X und der verfügbaren Annahmezeilenmenge Y und der Anziehungszeilenmenge Z.

Erläuterung: Klausel (i) legt wiederum die Induktionsbasis fest. Klausel (iii) ist wiederum die Abschlussklausel. In Klausel (ii) werden zunächst in (ii-i) bis (ii-v) die regelgemäßen Fortsetzungen abgehandelt, in denen sich die verfügbaren Anziehungs- oder Annahmezeilenmengen ändern: (ii-i) entspricht der Anziehungsregel, (ii-ii) der Annahmeregel; (ii-iii) bis (ii-v) entsprechen Subjunktoreinführung, Negatoreinführung und Partikularquantorbeseitigung. Der erste Teil von (ii-vi) stellt wieder eine Ausschlussklausel dar. Es wird ausgeschlossen, dass ein SE-, NE- oder PB-Szenario vorliegt. In den einzelnen Unterklauseln a) bis m) werden die verfügbaren Zeilenmengen und verfügbaren Annahmezeilenmengen der anderen regelgemäßen Fortsetzungsmöglichkeiten festgelegt. Diese Fortsetzungen sind auch dann regelgemäß, wenn die vorgeschaltete Ausschlussklausel jeweils nicht erfüllt ist – nur ist dann eine entsprechende Fortsetzung gleichzeitig eine Fortsetzung nach (i-iii), (i-iv) oder (i-v) und die Verfügbarkeiten ändern sich dementsprechend.

Mit dieser Definition gilt dann für alle $\mathfrak{H}$ und k: Ist $k \neq 0$ und $\mathfrak{H}$ eine Folge von k Sätzen, dann ist $\mathfrak{H}$ genau dann eine T-Ableitung von Γ aus X, wenn T eine Aussagenmenge ist und es X^*, Y, Z gibt, so dass $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von k Sätzen mit der verfügbaren Zeilenmenge der X^* und der verfügbaren Annahmezeilenmenge Y und der verfügbaren Anziehungszeilenmenge Z

ist und wenn $X = \{\Delta \mid$ Es gibt ein $i \in Y$ und Δ ist die Satzaussage in Zeile i von $\mathfrak{H}\}$ und $Z \subseteq T$ und Γ die Konklusion von $\mathfrak{H}$ ist.

---

[1] Für eine präzisere Darstellung, einen Adäquatheitsbeweis siehe unsere umfangreichere Arbeit *Redehandlungskalkül*. Die hier eingenommene Sicht auf das Ableiten, Beweisen und Argumentieren verdankt sich PETER HINST und GEO SIEGWART. Desgleichen baut die Entwicklung des Redehandlungskalküls auf den Arbeiten von HINST und SIEGWART zur Pragmatisierung von Kalkülen des natürlichen Schließens auf (siehe HINST, P.: *Pragmatische Regeln*, *Logischer Grundkurs*, *Logik* und SIEGWART, G.: *Vorfragen*, Kap. 4-6, *Denkwerkzeuge* und *Alethic Acts*.).

[2] Siehe dazu neben der in Endnote 1 angegebenen Literatur auch Siegwart, G.: *Begriffsbildung*.

[3] Siehe PRAWITZ, D.: *Natural Deduction*, S. 74.

Literaturverzeichnis

CORDES, M.; REINMUTH, F.: *Redehandlungskalkül* (2011): Ein Redehandlungskalkül. Ein pragmatisierter Kalkül des natürlichen Schließens nebst Metatheorie. Version 2.0. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00532643/en/.

HINST, P.: *Pragmatische Regeln* (1982): Pragmatische Regeln des logischen Argumentierens. In: GETHMANN, C.F. (Hg.): Logik und Pragmatik. Frankfurt am Main: Suhrkamp, S. 199–215.

HINST, P.: *Logischer Grundkurs* (1997/1998): Logischer Grundkurs I. Logische Propädeutik und Mengenlehre. WS 1997/1998. Ludwig-Maximiliams-Universität München.

HINST, P.: *Logik* (2009): Grundbegriffe der Logik. Typoskript München.

INDRZEJCZAK, A.: *Natural Deduction* (2010): Natural deduction, hybrid systems and modal logics. Dordrecht; London: Springer.

PRAWITZ, D.: *Natural Deduction* (2006): Natural deduction: a proof-theoretical study. Unabridged republ. of the ed. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1965. Mineola, NY: Dover Publ.

SIEGWART, G.: *Vorfragen* (1997): Vorfragen zur Wahrheit. München: Oldenbourg.

Siegwart, G.: *Begriffsbildung* (1999): Begriffsbildung. In: Sandkühler, H. J. (Hg.): Enzyklopädie Philosophie. 2 Bände. Hamburg: Meiner, Bd. 1, S. 130–144.

SIEGWART, G.: *Denkwerkzeuge* (2002ff): Denkwerkzeuge. Eine Vorschule der Philosophie. http://www.phil.uni-greifswald.de/bereich2/philosophie/personal-1/professoren/prof-dr-geo-siegwart/skripte.html.

SIEGWART, G.: *Alethic Acts* (2007): Alethic Acts and Alethiological Reflection. An Outline of a Constructive Philosophy of Truth. In: SIEGWART, G.; GREIMANN, D. (Hgg.): Truth and speech acts. Studies in the philosophy of language. New York: Routledge, S. 41–58.